~ CURS 7 ~

IV. Circuite trifazate

IV.1. Introducere

Dacă sursa de producere a energiei electromagnetice este un generator care produce un sistem trifazat de trei tensiuni electromotoare alternative, linia de transmisie este alcătuită din trei conductoare având aceeași secțiune, eventual și un conductor neutru de secțiune mai mică, iar receptorul are impedanțele de fază conectate în stea sau triunghi, sistemul de producere, transmisie și distribuție a energiei electromagnetice se numește *sistem trifazat*.

Comparativ cu sistemul monofazat, cel trifazat prezintă o serie de avantaje:

a. o transmisie de energie mai ieftină, costul liniei de transport fiind mai mic la aceeași putere tranzitată;
b. posibilitatea de a dispune la consumator de două tensiuni diferite (de fază sau de linie);
c. posibilitatea funcționării în regim de avarie în cazul întreruperii unei faze, chiar două.

IV.2. Sisteme de mărimi trifazate

Un ansamblu de trei mărimi sinusoidale, ordonate, de aceeași frecvență, defazate între ele se numește sistem trifazat și poate fi exprimat cu relația:

$$m_k(t)=\sqrt{2}M_k\sin(\omega t+\varphi_k),\ k=\overline{1,3} \qquad (4.1)$$

Dacă valorile efective ale mărimilor sistemului sunt egale ($M_1=M_2=M_3=M$) și defazajele între două mărimi consecutive sunt $\varphi_1-\varphi_2=\varphi_2-\varphi_3=\frac{2\pi}{3}\alpha$, sistemul se numește trifazat simetric.

→ dacă α = 1 – succesiune directă; $\underline{M}_1, \underline{M}_2, \underline{M}_3$ - sens orar;

→ dacă α = -1 – succesiune inversă; $\underline{M}_1, \underline{M}_2, \underline{M}_3$ - sens trigonometric;

→ dacă α = 0 – succesiune homopolară; $\underline{M}_1, \underline{M}_2, \underline{M}_3$ - paraleli.

A. Sistem trifazat de succesiune directă

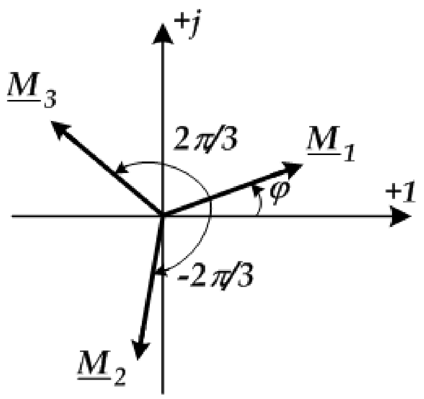


Fig. 4.1. Succesiunea directă

$$\underline{M}_1=M\cdot e^{j\cdot\varphi}=\underline{M}$$

$$\underline{M}_2=M\cdot e^{j(\varphi-\frac{2\pi}{3})}=\underline{M}\cdot e^{-j\cdot\frac{2\pi}{3}}=a^2\cdot\underline{M}$$

$$\underline{M}_3=M\cdot e^{j(\varphi+\frac{2\pi}{3})}=\underline{M}\cdot e^{j\cdot\frac{2\pi}{3}}=a\cdot\underline{M}$$

unde: $$a=e^{j\cdot\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2=e^{j\cdot\frac{4\pi}{3}}=e^{-j\cdot\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^*=a^2$$

IV.3. Conexiunile circuitelor trifazate

Sistemele trifazate pot funcționa în una din următoarele conexiuni:

- în conexiune stea, obținută prin legarea sfârșitului celor trei faze la un același punct numit neutru sau nul;
- în conexiune triunghi, realizată prin legarea sfârșitului fiecărei faze la începutul fazei următoare;

Calculul circuitelor electrice trifazate constă, în general, în determinarea curenților de fază și de linie, cunoscând valorile tensiunilor de alimentare (de fază sau de linie), respectiv ale impedanțelor de pe fiecare fază.

A. Analiza circuitelor trifazate în conexiune stea

În cazul cel mai general, schema unui circuit trifazat în conexiune stea este reprezentat în figura 4.5. Denumirea mărimilor este specifică sistemelor trifazate, după cum urmează:

$\underline{U}_{10}$, $\underline{U}_{20}$, $\underline{U}_{30}$ – tensiunile de fază la generator;

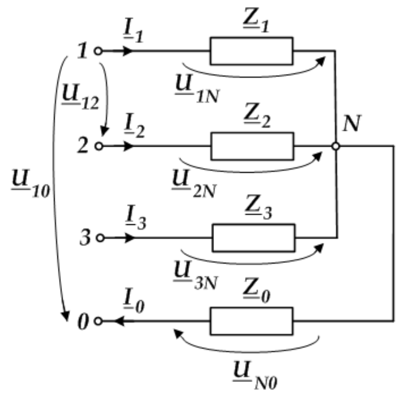
$\underline{U}_{1N}$, $\underline{U}_{2N}$, $\underline{U}_{3N}$ – tensiunile de fază la receptor;

$\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$ – tensiunile de linie (între faze);

$\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ – curenții de linie (egali cu cei de fază în cazul acestei conexiuni);

$\underline{U}_{N0}$ – tensiunea de deplasare a nulului;

$\underline{I}_0$ – curentul de pe firul neutru.



$$\underline{U}_{10} = U_f \cdot e^{j \cdot \varphi}$$
$$\underline{U}_{20} = a^2 \cdot \underline{U}_1$$
$$\underline{U}_{30} = a \cdot \underline{U}_1$$

Fig. 4.5. Conexiune stea

a) când $\underline{Z}_0 \neq 0$ (conexiunea stea cu conductor neutru cu impedanță):

Aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff în nodul *N* se obține:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 - \underline{I}_0 = 0,$$

în care fiecare curent este substituit pe baza legii lui Ohm:

$$\underline{Y}_1 \cdot \underline{U}_{10} + \underline{Y}_2 \cdot \underline{U}_{20} + \underline{Y}_3 \cdot \underline{U}_{30} - \underline{U}_{N0}(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_0 = 0)$$

Din această relație se poate determina valoarea tensiunii de deplasare a nulului (*formula lui Millman*):

$$\underline{U}_{N0} = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{U}_{10} + \underline{Y}_2 \cdot \underline{U}_{20} + \underline{Y}_3 \cdot \underline{U}_{30}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_0} \qquad (4.3)$$

După determinarea lui $\underline{U}_{N0}$, curenții prin circuit (de linie, respectiv de pe firul neutru) se determină cu ajutorul relațiilor lui Ohm pe fiecare impedanță în parte:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1N}}{\underline{Z}_1} = \underline{Y}_1(\underline{U}_{10} - \underline{U}_{N0}) \qquad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3N}}{\underline{Z}_3} = \underline{Y}_3(\underline{U}_{30} - \underline{U}_{N0})$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2N}}{\underline{Z}_2} = \underline{Y}_2(\underline{U}_{20} - \underline{U}_{N0}) \qquad \underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_{N0}}{\underline{Z}_0} = \underline{Y}_0 \cdot \underline{U}_{N0}$$

b) când $\underline{Z}_0 \to \infty$ (conexiunea stea fără conductor neutru):

Se ajunge la formula lui Millman în care $\underline{Y}_0 = 0$

$$\Rightarrow \underline{U}_{N0} = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{U}_{10} + \underline{Y}_2 \cdot \underline{U}_{20} + \underline{Y}_3 \cdot \underline{U}_{30}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

Curenții pe fază se calculează ca la punctul anterior.

c) când $\underline{Z}_0 = 0$ (conexiunea stea cu conductor neutru cu impedanță nulă), generează următoarele relații de calcul:

$$\underline{U}_{N0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{U}_{10} = \underline{U}_{1N} \Rightarrow \underline{I}_1 = \dfrac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_1} \\ \underline{U}_{20} = \underline{U}_{2N} \Rightarrow \underline{I}_2 = \dfrac{\underline{U}_{20}}{\underline{Z}_2} \\ \underline{U}_{30} = \underline{U}_{3N} \Rightarrow \underline{I}_3 = \dfrac{\underline{U}_{30}}{\underline{Z}_3} \end{cases}$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

B. <u>Analiza circuitelor trifazate în conexiune triunghi</u>

Circuitul trifazat în conexiunea triunghi (fig. 4.6) are următoarele mărimi specifice:

$\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$ – tensiunile de linie (egale cu cele de fază în cazul acestei conexiuni);

$\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ – curenții de linie;

$\underline{I}_{12}$, $\underline{I}_{23}$, $\underline{I}_{31}$ – curenții de fază;

$$\underline{U}_{12} = U \cdot e^{j\cdot\varphi}$$

$$\underline{U}_{23} = U \cdot e^{j(\varphi - \frac{2\pi}{3})} = a^2 \cdot \underline{U}_{12}$$

$$\underline{U}_{31} = U \cdot e^{j(\varphi + \frac{2\pi}{3})} = a \cdot \underline{U}_{12}$$

În cazul acestei conexiuni, tensiunile de fază sunt egale cu cele de linie, deci curenții de fază pot fi determinați cu ajutorul legii lui Ohm:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} \qquad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} \qquad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}},$$

iar curenții de linie se calculează cu ajutorul primei teoreme a lui Kirchhoff:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} \qquad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} \qquad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}$$

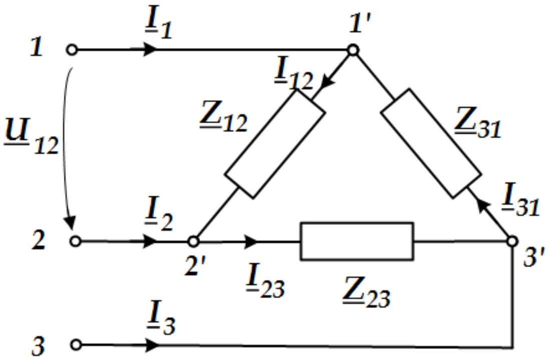


Fig. 4.6. Conexiune triunghi

IV.4. Puteri în sisteme trifazate

Fie un cuadripol reprezentat de un receptor trifazat (fig. 4.8) pentru care putem defini următoarele puteri:

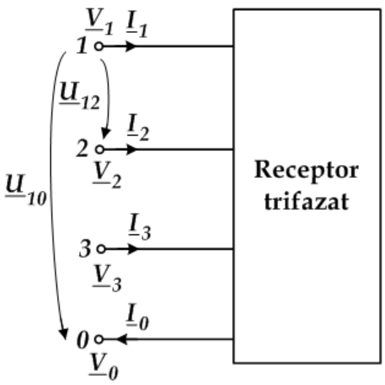


Fig. 4.8. Puteri în circuite trifazate

$$\left.\begin{aligned}&\underline{S}_g = \underline{V}_1 \cdot \underline{I}_1^* + \underline{V}_2 \cdot \underline{I}_2^* + \underline{V}_3 \cdot \underline{I}_3^* + \underline{V}_0(-\underline{I}_0^*)\\ &\text{Dar } \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_0\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{S}_g = (\underline{V}_1 - \underline{V}_0)\cdot \underline{I}_1^* + (\underline{V}_2 - \underline{V}_0)\cdot \underline{I}_2^* + (\underline{V}_3 - \underline{V}_0)\cdot \underline{I}_3^* =$$
$$= \underline{U}_{10} \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_{20} \cdot \underline{I}_2^* + \underline{U}_{30} \cdot \underline{I}_3^*$$

Sistemul este dezechilibrat, deci:

$$\begin{cases}\underline{U}_{10} = U_1 \cdot e^{j\cdot\alpha_1} & \underline{U}_{20} = U_2 \cdot e^{j\cdot\alpha_2} \quad \underline{U}_{30} = U_3 \cdot e^{j\cdot\alpha_3}\\ \underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{j\cdot\beta_1} & \underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\cdot\beta_2} \quad \underline{I}_3 = I_3 \cdot e^{j\cdot\beta_3}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{S}_g = U_{10} \cdot I_1 \cdot e^{j\cdot\varphi_1} + U_{20} \cdot I_2 \cdot e^{j\cdot\varphi_2} + U_{30} \cdot I_3 \cdot e^{j\cdot\varphi_3}, \text{ unde } \varphi_j = \alpha_j - \beta_j$$

Partea reală a puterii complexe reprezintă puterea activă trifazată furnizată receptorului:

$$P_g = \mathrm{Re}\{\underline{S}_g\} = U_{10} \cdot I_1 \cdot \cos\varphi_1 + U_{20} \cdot I_2 \cdot \cos\varphi_2 + U_{30} \cdot I_3 \cdot \cos\varphi_3$$

Partea imaginară a puterii complexe este puterea reactivă trifazată furnizată receptorului:

$$Q_g = \mathrm{Im}\{\underline{S}_g\} = U_{10} \cdot I_1 \cdot \sin\varphi_1 + U_{20} \cdot I_2 \cdot \sin\varphi_2 + U_{30} \cdot I_3 \cdot \sin\varphi_3$$

În afara acestor puteri definite la bornele receptorului, se mai pot exprima puterile consumate în elementele rezistive și reactive ale circuitului:

$$\underline{S}_C = \underline{Z}_1 \cdot I_1^2 + \underline{Z}_2 \cdot I_2^2 + \underline{Z}_3 \cdot I_3^2 + \underline{Z}_0 \cdot I_0^2 = \sum_{k=0}^{3} R_k \cdot I_k^2 + j\sum_{k=0}^{3} X_k \cdot I_k^2 ,$$

unde:

$$P_C = \mathrm{Re}\{\underline{S}_C\} = \sum_{k=0}^{3} R_k \cdot I_k^2$$

$$Q_C = \mathrm{Im}\{\underline{S}_C\} = \sum_{k=0}^{3} X_k \cdot I_k^2 = \sum_{k=0}^{3} (X_{L_k} - X_{C_k}) I_k^2$$

A. Puteri în sisteme trifazate în regim simetric și echilibrate

Dacă sistemul tensiunilor de alimentare ale unui receptor trifazat echilibrat în conexiune stea au conductor neutru este simetric de succesiune directă:

$$u_{10}(t) = \sqrt{2} \cdot U_f \sin(\omega t + \alpha) \Rightarrow \underline{U}_{10} = U_f \cdot e^{j\cdot\alpha}$$

$$u_{20}(t) = \sqrt{2} \cdot U_f \sin(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \underline{U}_{20} = U_f \cdot e^{j\cdot(\alpha - \frac{2\pi}{3})} = a^2 \cdot \underline{U}_{10}$$

$$u_{30}(t) = \sqrt{2} \cdot U_f \sin(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \underline{U}_{30} = U_f \cdot e^{j\cdot(\alpha + \frac{2\pi}{3})} = a \cdot \underline{U}_{10}$$

și sistemul curenților este de succesiune directă:

$$i_1(t) = \sqrt{2} \cdot I_f \sin(\omega t + \beta) \Rightarrow \underline{I}_1 = I_f \cdot e^{j\cdot\beta}$$

$$i_2(t) = \sqrt{2} \cdot I_f \sin(\omega t + \beta - \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \underline{I}_2 = I_f \cdot e^{j\cdot(\beta - \frac{2\pi}{3})} = a^2 \cdot \underline{I}_1$$

$$i_3(t) = \sqrt{2} \cdot I_f \sin(\omega t + \beta + \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \underline{I}_3 = I_f \cdot e^{j\cdot(\beta + \frac{2\pi}{3})} = a \cdot \underline{I}_1$$

Puterea instantanee totală este:

$$p = u_{10} \cdot i_1 + u_{20} \cdot i_2 + u_{30} \cdot i_3 = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos\varphi$$

Puterea complexă trifazată transmisă receptorului este:

$$\underline{S}_g = \underline{U}_{10} \cdot \overset{*}{\underline{I}}_1 + \underline{U}_{20} \cdot \overset{*}{\underline{I}}_2 + \underline{U}_{30} \cdot \overset{*}{\underline{I}}_3 =$$
$$= U_f \cdot e^{j\cdot\alpha} I_f \cdot e^{-j\cdot\beta} + U_f \cdot e^{j\cdot\alpha} \cdot a^2 \cdot I_f \cdot e^{-j\cdot\beta} \cdot a + U_f \cdot e^{j\cdot\alpha} \cdot a \cdot I_f \cdot e^{-j\cdot\beta} \cdot a^2$$

- conexiunea stea: $\begin{cases} U_l = \sqrt{3} \cdot U_f \\ I_l = I_f \end{cases} \Rightarrow U_l \cdot I_l = \sqrt{3} \cdot U_f \cdot I_f$

- conexiunea triunghi: $\begin{cases} U_l = U_f \\ I_l = \sqrt{3} \cdot I_f \end{cases} \Rightarrow U_l \cdot I_l = \sqrt{3} \cdot U_f \cdot I_f$

$$\Rightarrow \underline{S}_g = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l \cdot e^{j\cdot\varphi}$$

Atunci puterile active și reactive sunt:

$$P_g = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l \cdot \cos\varphi$$

$$Q_g = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \sin\varphi = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l \cdot \sin\varphi$$

Factorul de putere pentru un circuit trifazat în regim simetric se definește cu relația:

$$K = \cos\varphi = \frac{P_g}{S_g}$$